

Test di Ipotesi (2)

Corso di Statistica di base

Giancarlo Ferrari

Introduzione

- Nella lezione precedente i test di ipotesi sono stati effettuati confrontando il valore medio di un campione estratto da una popolazione e un valore medio di riferimento
- Nella realtà in molte applicazioni pratiche i confronti vengono effettuati tra due campioni per valutare se le differenze osservate sono troppo grandi da poter essere attribuite al caso

Introduzione

- Un test di ipotesi su due campioni è simile ad un test condotto per un singolo campione
- Anche in questo caso viene formulata una Ipotesi Nulla tesa a verificare se le due medie campionarie sono uguali e calcolarne quindi la relativa probabilità

Introduzione

- In analogia con quanto fatto in precedenza si deve stabilire: (i) il livello di significatività α e (ii) se siamo interessati ad effettuare un test unilaterale o bilaterale
- Inoltre il tipo più appropriato di test da utilizzare dipenderà anche dal tipo di dati a disposizione

Test di ipotesi su due medie (dati appaiati)

- Nel caso dei dati appaiati ciò consente di eliminare qualsiasi fattore estraneo e potenzialmente confondente
- Si consideri il seguente esperimento: si vuole valutare l'efficacia di un farmaco destinato ad essere utilizzato su cani ritenuti essere troppo aggressivi e si vuole valutare se il farmaco contribuisce a ridurre il livello di aggressività
- Il livello di aggressività viene misurato mediante un punteggio da 0 a 30 (punteggi elevati corrispondono ad elevata aggressività)

Test di ipotesi su due medie (dati appaiati)

- A rigor di logica il livello di aggressività non è una variabile di tipo quantitativo ma per il momento si ignori tale limitazione
- L'esperimento consiste nel somministrare ad un gruppo di 10 soggetti un farmaco per una settimana e di valutare dopo una settimana il livello di aggressività
- In un altro momento gli stessi soggetti vengono sottoposti ad un trattamento di una settimana con un placebo e di nuovo ne viene valutato il livello di aggressività al termine della settimana di somministrazione

Test di ipotesi per una media campionaria

- L'ipotesi nulla è che non vi sia differenza tra i punteggi rilevati al momento della somministrazione del farmaco e del placebo

$$H_0: \bar{d} = \delta = 0$$

$$H_a: \bar{d} \neq \delta \neq 0$$

- In questo caso eseguiamo un test bilaterale a livello di significatività del 5%

Test di ipotesi su due medie (dati appaiati)

Risultati

Soggetto	Livello di aggressività	
	Farmaco	Placebo
1	19	22
2	11	18
3	14	17
4	17	19
5	23	22
6	11	12
7	15	14
8	19	11
9	11	19
10	8	7

Test di ipotesi su due medie (dati appaiati)

- Nell'esperimento vengono calcolate le differenze tra ogni coppia di osservazioni sullo stesso soggetto

Soggetto	Livello di aggressività		Differenza
	Farmaco	Placebo	Farmaco-Placebo
1	19	22	-3
2	11	18	-7
3	14	17	-3
4	17	19	-2
5	23	22	1
6	11	12	-1
7	15	14	1
8	19	11	8
9	11	19	-8
10	8	7	1
		\bar{d} (media)	-1,3

Test di ipotesi su due medie (dati appaiati)

- Invece di analizzare le osservazioni individuali si utilizza come variabile di interesse la differenza tra ciascuna coppia di valori di ciascun soggetto
- La differenza è quindi trattata come una misura singola rispetto alla quale si può calcolare la media \bar{d} e la deviazione standard:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{10} d_i}{n} = -1,3 \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (d_i - \bar{d})^2}{n-1}} = 4,55$$

Test di ipotesi su due medie (dati appaiati)

- L'ipotesi nulla può essere verificata utilizzando il test t (data la bassa numerosità campionaria è prudente utilizzare un test che dia intervalli di confidenza più ampi)

$$t = \frac{-1,3 - 0}{4,55 / \sqrt{10}} = -0,9 \text{ (con 9 gradi di libertà)}$$

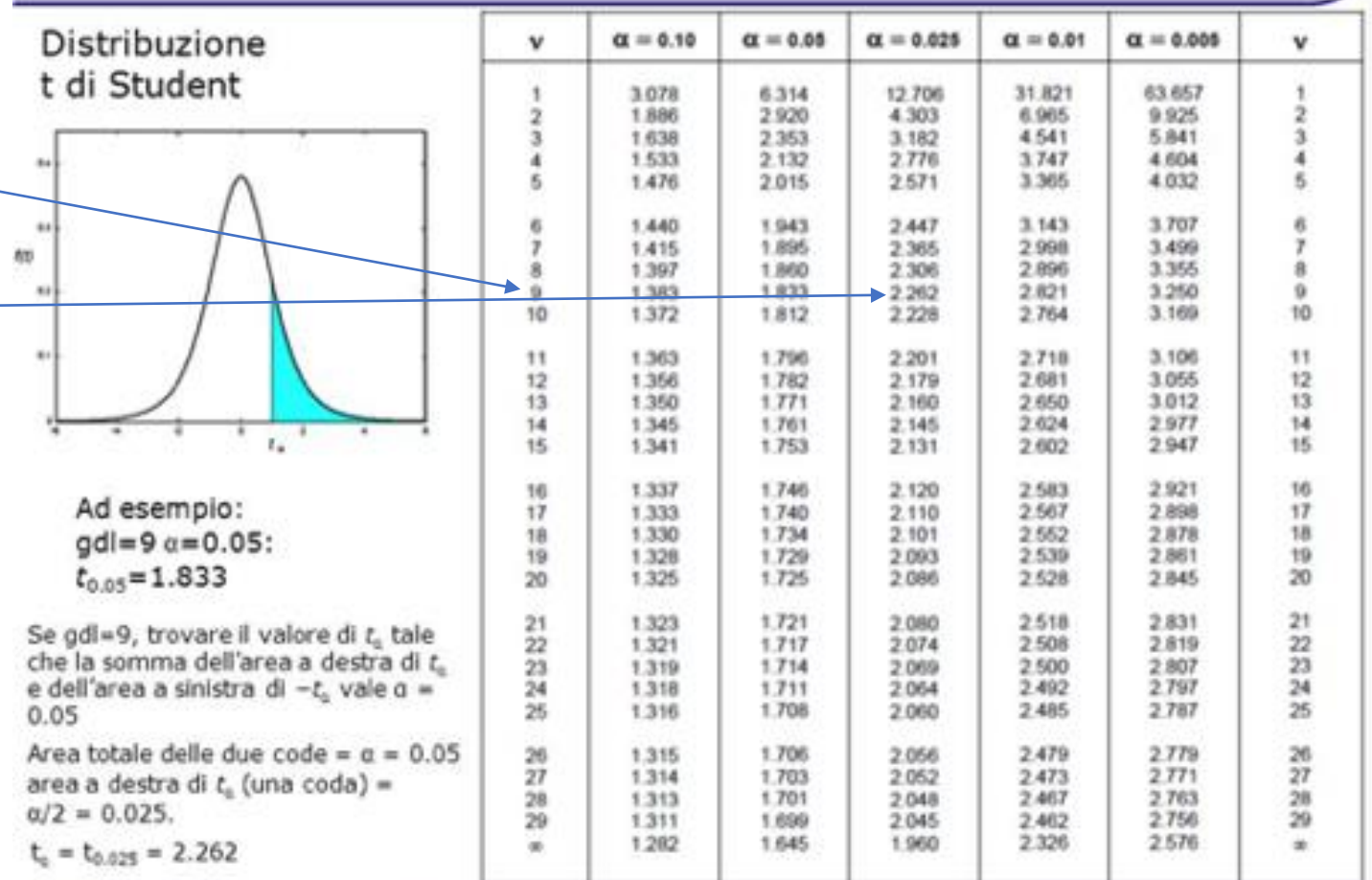
Test di ipotesi su due medie (dati appaiati)

$$t = \frac{-1,3 - 0}{4,55 / \sqrt{10}} = -0,9 \text{ (con 9 gradi di libertà)}$$

In corrispondenza di $t_{\alpha/2, 9 \text{ gl}} = 2,262$

Tale valore è il valore critico e il test sarebbe stato significativo se il risultato del test t era maggiore o uguale a 2,262 oppure minore o uguale a -2,262

Poichè -0,9 non soddisfa nessuna di tali condizioni non vi sono elementi a sufficienza per rifiutare l'ipotesi nulla e pertanto si conclude che il trattamento con il farmaco non ha prodotto risultati tali da ritenere che vi sia una differenza



Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

- Spesso vengono effettuati confronti tra due sotto-popolazioni rispetto alle quali si vuole studiare l'eventuale differenza tra i valori di un parametro (ad esempio il valore medio)
- Anche in questo caso vengono esaminati due campioni ma non vi è alcun appaiamento tra coppie di osservazioni
- L'assunzione che viene fatta è che la distribuzione campionaria delle differenze sia Normale (estensione del Teorema Centrale del Limite)
- Si deve pertanto ipotizzare una distribuzione di tutti i possibili valori delle differenze campionarie $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ del parametro (sconosciuto) $\mu_1 - \mu_2$

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

- Come accade spesso nella sperimentazione clinica i due gruppi da sottoporre a confronto sono in certo senso creati artificialmente
- Ad esempio se debbo effettuare una sperimentazione clinica di un farmaco su animali affetti da una stessa patologia si assegna in maniera randomizzata (casuale) un gruppo al trattamento (gruppo al quale verrà somministrato il farmaco) ed un gruppo al placebo (gruppo al quale verrà somministrata una sostanza inerte oppure un trattamento alternativo)
- Questa suddivisione è in un certo senso creata artificialmente per studiare gli effetti del farmaco

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

- Si supponga di voler effettuare un esperimento dove si vuole verificare se l'aggiunta di una miscela probiotica alla dieta migliora l'accrescimento nei suinetti
- Si abbiano quindi due gruppi dove un gruppo è sottoposto al trattamento (aggiunta di miscela probiotica) mentre l'altro gruppo è alimentato con la stessa miscela ma senza l'aggiunta del probiotico
- Per effettuare lo studio ogni soggetto deve essere assegnato a caso all'uno o all'altro trattamento
- A tale scopo viene assegnato al gruppo 1 (trattamento) un numero di soggetti pari a n_1 e al gruppo 2 (standard) un numero di pazienti pari a n_2

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

- Si deve immaginare di aver quindi effettuato le misurazioni sui due gruppi di soggetti n_1 ed n_2 (non è necessario che $n_1 = n_2$ e quindi che i due gruppi abbiano la stessa numerosità campionaria) e per ciascun gruppo averne stimato il valore medio di riduzione della pressione che si supponga essere \bar{x}_1 ed \bar{x}_2
- Naturalmente per ciascun gruppo possiamo stimare la deviazione standard e l'errore standard

$$s_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2}{n_1 - 1}}$$

$$SE_1 = \frac{s_1}{\sqrt{n_1}}$$

- Lo stesso si può fare per s_2 ed SE_2

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

- A questo punto il test di significatività della differenza tra \bar{x}_1 ed \bar{x}_2 potrebbe essere valutato con la Deviato Normale Standard Z:

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

- L'ipotesi nulla in questo caso sarebbe $H_0: (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = (\mu_1 - \mu_2) = 0$
- Naturalmente l'ipotesi alternativa $H_a: (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \neq (\mu_1 - \mu_2) \neq 0$

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

- Come è stato già detto in precedenza è usuale che il valore della varianza (e quindi della deviazione standard della popolazione) non è noto e viene utilizzata la stima della varianza dedotta dal campione
- In questi casi è pertanto più appropriato ricorrere al test t di Student e la formula precedente diventa:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

- L'ipotesi nulla e alternativa restano invariate

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

- Torniamo all'esperimento
- Lo studio sperimentale viene effettuato su due piccoli gruppi che sono omogenei per razza, età, provenienza, ecc..) in modo da effettuare l'effetto di una potenziale variabile che possa avere effetto confondente
- Gli animali sono mantenuti tutti nelle stesse condizioni di allevamento

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

- Il gruppo 1 è costituito da 10 suini ($n_1 = 10$) mentre il gruppo 2 è costituito da 11 suini ($n_2 = 11$)
- All'inizio dell'esperimento ciascun suino viene pesato e ciascun suino viene casualmente assegnato al gruppo di trattamento o al gruppo di controllo
- Al gruppo 1 di 10 suini viene somministrato il probiotico mentre al gruppo 2 di 11 suini no

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

Il peso degli animali viene misurato giornalmente per i 21 giorni di durata dell'esperimento e i valori della tabella rappresentano gli incrementi medi giornalieri osservati nei due gruppi (i dati sono fittizi)

Il test è bilaterale per un livello complessivo di $\alpha = 0,05$

Suino n.	Gruppo 1 (trattato)	Gruppo 2 (non trattato)
1	639	650
2	646	633
3	650	631
4	641	637
5	641	642
6	637	638
7	659	640
8	650	634
9	640	626
10	635	636
11		640
MEDIA	643,8	636,7
VARIANZA	54.4	39,6

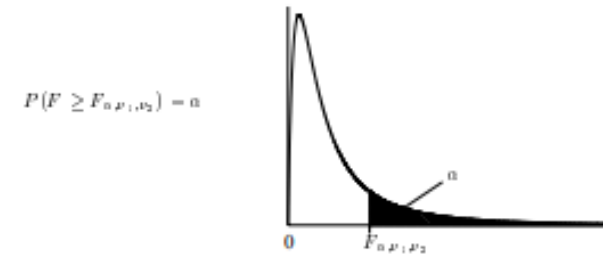
Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

- A questo punto abbiamo una piccola complicazione dovuta al fatto che il test t di Student è applicabile quando le varianze delle due sotto-popolazioni da porre a confronto non sono eccessivamente diverse
- Per stabilire quanto diverse si deve effettuare anche qui un test di ipotesi (in questo caso sulle varianze campionarie)
- In questo caso l'ipotesi da verificare è che $H_0: s_1^2 = s_2^2$ (chiaramente l'ipotesi alternativa $H_a: s_1^2 \neq s_2^2$)

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

- Il rapporto tra varianze segue una distribuzione teorica di probabilità chiamata F di Fisher i cui valori sono tabulati
- La tabella rappresenta i valori della F di Fisher per un valore critico pari a $\alpha = 0,05$
- Notare che la distribuzione è definita per valori che vanno da 0 a $+\infty$ e che la tavola definisce l'area a destra del valore F (da F a $+\infty$)

Tavola 4: Valori critici della Distribuzione F



$\alpha = 0.05$	ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	50	60	120	∞
1	1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	243.95	248.02	250.10	251.14	251.77	252.20	253.25	254.31
2	2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.43	19.45	19.46	19.47	19.48	19.48	19.49	19.50
3	3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.70	8.66	8.62	8.59	8.58	8.57	8.55	8.53
4	4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.86	5.80	5.75	5.72	5.70	5.69	5.66	5.63
5	5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.62	4.56	4.50	4.46	4.44	4.43	4.40	4.37
6	6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	3.94	3.87	3.81	3.77	3.75	3.74	3.70	3.67
7	7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.51	3.44	3.38	3.34	3.32	3.30	3.27	3.23
8	8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.22	3.15	3.08	3.04	3.02	3.01	2.97	2.93
9	9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.01	2.94	2.86	2.83	2.80	2.79	2.75	2.71
10	10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.85	2.77	2.70	2.66	2.64	2.62	2.58	2.54
11	11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.72	2.65	2.57	2.53	2.51	2.49	2.45	2.40
12	12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.62	2.54	2.47	2.43	2.40	2.38	2.34	2.30
13	13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.53	2.46	2.38	2.34	2.31	2.30	2.25	2.21
14	14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.46	2.39	2.31	2.27	2.24	2.22	2.18	2.13
15	15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.40	2.33	2.25	2.20	2.18	2.16	2.11	2.07
16	16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.35	2.28	2.19	2.15	2.12	2.11	2.06	2.01
17	17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.31	2.23	2.15	2.10	2.08	2.06	2.01	1.96
18	18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.27	2.19	2.11	2.06	2.04	2.02	1.97	1.92
19	19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.23	2.16	2.07	2.03	2.00	1.98	1.93	1.88
20	20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.20	2.12	2.04	1.99	1.97	1.95	1.90	1.84
21	21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.18	2.10	2.01	1.96	1.94	1.92	1.87	1.81
22	22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.15	2.07	1.98	1.94	1.91	1.89	1.84	1.78
23	23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.13	2.05	1.96	1.91	1.88	1.86	1.81	1.76
24	24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.11	2.03	1.94	1.89	1.86	1.84	1.79	1.73
25	25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.09	2.01	1.92	1.87	1.84	1.82	1.77	1.71
30	30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.01	1.93	1.84	1.79	1.76	1.74	1.68	1.62
40	40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	1.92	1.84	1.74	1.69	1.66	1.64	1.58	1.51
50	50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.87	1.78	1.69	1.63	1.60	1.58	1.51	1.44
60	60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.84	1.75	1.65	1.59	1.56	1.53	1.47	1.39
120	120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.75	1.66	1.55	1.50	1.46	1.43	1.35	1.25
∞	∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.67	1.57	1.46	1.39	1.35	1.32	1.22	1.01

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

Tavola 4 (segue): Valori critici della Distribuzione F

- La tabella rappresenta i valori della F di Fisher per un valore critico pari a $\alpha = 0,025$

- Notare che la tavola è organizzata per valori di $F > 1$

$\alpha = 0.025$	ν_1																	
ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	50	60	120	∞
1	647.79	799.48	864.15	899.60	921.83	937.11	948.20	956.64	963.28	968.63	984.87	993.08	1001.40	1005.60	1008.10	1009.79	1014.04	1018.26
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.43	39.45	39.46	39.47	39.48	39.48	39.49	39.50
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.25	14.17	14.08	14.04	14.01	13.99	13.95	13.90
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.66	8.56	8.46	8.41	8.38	8.36	8.31	8.26
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.43	6.33	6.23	6.18	6.14	6.12	6.07	6.02
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.27	5.17	5.07	5.01	4.98	4.96	4.90	4.85
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.57	4.47	4.36	4.31	4.28	4.25	4.20	4.14
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.10	4.00	3.89	3.84	3.81	3.78	3.73	3.67
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.77	3.67	3.56	3.51	3.47	3.45	3.39	3.33
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.52	3.42	3.31	3.26	3.22	3.20	3.14	3.08
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.33	3.23	3.12	3.06	3.03	3.00	2.94	2.88
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.18	3.07	2.96	2.91	2.87	2.85	2.79	2.73
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.05	2.95	2.84	2.78	2.74	2.72	2.66	2.60
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	2.95	2.84	2.73	2.67	2.64	2.61	2.55	2.49
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.86	2.76	2.64	2.59	2.55	2.52	2.46	2.40
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.79	2.68	2.57	2.51	2.47	2.45	2.38	2.32
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.72	2.62	2.50	2.44	2.41	2.38	2.32	2.25
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.67	2.56	2.44	2.38	2.35	2.32	2.26	2.19
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.62	2.51	2.39	2.33	2.30	2.27	2.20	2.13
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.57	2.46	2.35	2.29	2.25	2.22	2.16	2.09
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.53	2.42	2.31	2.25	2.21	2.18	2.11	2.04
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.50	2.39	2.27	2.21	2.17	2.14	2.08	2.00
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.47	2.36	2.24	2.18	2.14	2.11	2.04	1.97
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.44	2.33	2.21	2.15	2.11	2.08	2.01	1.94
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.41	2.30	2.18	2.12	2.08	2.05	1.98	1.91
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.31	2.20	2.07	2.01	1.97	1.94	1.87	1.79
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.18	2.07	1.94	1.88	1.83	1.80	1.72	1.64
50	5.34	3.97	3.39	3.05	2.83	2.67	2.55	2.46	2.38	2.32	2.11	1.99	1.87	1.80	1.75	1.72	1.64	1.55
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.06	1.94	1.82	1.74	1.70	1.67	1.58	1.48
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	1.94	1.82	1.69	1.61	1.56	1.53	1.43	1.31
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.83	1.71	1.57	1.48	1.43	1.39	1.27	1.01

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

Tavola 4 (segue): Valori critici della Distribuzione F

- La tavola è organizzata per righe e colonne corrispondenti a valori pari a ν (nu) e che rappresentano i gradi di libertà delle due distribuzioni che si vogliono confrontare
- Il test F si esegue calcolando il rapporto tra le varianze dei due campioni $F_{calc} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ e confrontandolo con i valori tabulati

gl denominatore	gl numeratore																		
	$\alpha = 0.025$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	50	60	120	∞
1		647.79	799.48	864.15	899.60	921.83	937.11	948.20	956.64	963.28	968.63	984.87	993.08	1001.40	1005.60	1008.10	1009.79	1014.04	1018.26
2		38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.43	39.45	39.46	39.47	39.48	39.48	39.49	39.50
3		17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.25	14.17	14.08	14.04	14.01	13.99	13.95	13.90
4		12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.66	8.56	8.46	8.41	8.38	8.36	8.31	8.26
5		10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.43	6.33	6.23	6.18	6.14	6.12	6.07	6.02
6		8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.27	5.17	5.07	5.01	4.98	4.96	4.90	4.85
7		8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.57	4.47	4.36	4.31	4.28	4.25	4.20	4.14
8		7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.10	4.00	3.89	3.84	3.81	3.78	3.73	3.67
9		7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.77	3.67	3.56	3.51	3.47	3.45	3.39	3.33
10		6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.52	3.42	3.31	3.26	3.22	3.20	3.14	3.08
11		6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.33	3.23	3.12	3.06	3.03	3.00	2.94	2.88
12		6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.18	3.07	2.96	2.91	2.87	2.85	2.79	2.73
13		6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.05	2.95	2.84	2.78	2.74	2.72	2.66	2.60
14		6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	2.95	2.84	2.73	2.67	2.64	2.61	2.55	2.49
15		6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.86	2.76	2.64	2.59	2.55	2.52	2.46	2.40
16		6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.79	2.68	2.57	2.51	2.47	2.45	2.38	2.32
17		6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.72	2.62	2.50	2.44	2.41	2.38	2.32	2.25
18		5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.67	2.56	2.44	2.38	2.35	2.32	2.26	2.19
19		5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.62	2.51	2.39	2.33	2.30	2.27	2.20	2.13
20		5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.57	2.46	2.35	2.29	2.25	2.22	2.16	2.09
21		5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.53	2.42	2.31	2.25	2.21	2.18	2.11	2.04
22		5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.50	2.39	2.27	2.21	2.17	2.14	2.08	2.00
23		5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.47	2.36	2.24	2.18	2.14	2.11	2.04	1.97
24		5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.44	2.33	2.21	2.15	2.11	2.08	2.01	1.94
25		5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.41	2.30	2.18	2.12	2.08	2.05	1.98	1.91
30		5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.31	2.20	2.07	2.01	1.97	1.94	1.87	1.79
40		5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.18	2.07	1.94	1.88	1.83	1.80	1.72	1.64
50		5.34	3.97	3.39	3.05	2.83	2.67	2.55	2.46	2.38	2.32	2.11	1.99	1.87	1.80	1.75	1.72	1.64	1.55
60		5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.06	1.94	1.82	1.74	1.70	1.67	1.58	1.48
120		5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	1.94	1.82	1.69	1.61	1.56	1.53	1.43	1.31
∞		5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.83	1.71	1.57	1.48	1.43	1.39	1.27	1.01

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

- Se l'ipotesi da verificare è che $H_0: s_1^2 = s_2^2$ ciò sta a significare che in caso di effettiva uguaglianza il rapporto tra le due varianze deve valere 1
- Una volta ottenuti i valori della F di Fisher che delimitano la regione di accettazione lo si confronta con il valore stimato in funzione dei gradi di libertà e del valore critico scelto.

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

- Vi sono due possibili scenari:
 - $F > 1$ quando la varianza al numeratore è maggiore di quella del denominatore
 - $F < 1$ quando la varianza al numeratore è inferiore di quella al denominatore

Il problema è quindi quello di individuare un intervallo (attorno al valore 1) che delimiti la regione di accettazione (il test quindi che si sta ipotizzando di eseguire è bilaterale e prende in considerazione deviazioni sia maggiori che minori di 1).

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

- Tale intervallo sarà evidentemente delimitato da un valore soglia >1 tale che se il valore della F stimata dai dati è maggiore di tale valore la differenza è significativa;
- In maniera analoga si dovrà identificare un valore soglia inferiore ($F < 1$) tale che se il valore della F stimata dai dati è minore di tale valore la differenza è significativa (al livello di significatività prescelto).

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

- Il modo di procedere per trovare tale intervallo è il seguente:
- Ipotesi nulla $\frac{s_1^2}{s_2^2} = 1$
- L'ipotesi alternativa è naturalmente che $\frac{s_1^2}{s_2^2} \neq 1$
- Si vuole effettuare un test bilaterale con livello di confidenza α complessivo pari a 0,05

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

- Si ponga che i due gruppi da confrontare abbiano numerosità campionaria pari a $n_1 = 10$ e $n_2 = 11$ (come nell'esempio)
- A tale numerosità campionaria corrispondono i rispettivi gradi di libertà pari a $gl_1 = 10 - 1 = 9$ e $gl_2 = 11 - 1 = 10$

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

- A questo punto va trovato il valore nella tavola (per valori critici pari a 0,025) in corrispondenza di 9 gradi di libertà al numeratore e 10 gradi di libertà al denominatore
- Tale valore è pari a 3,78 a significare che se il valore calcolato sui dati è maggiore di tale soglia la differenza è da ritenersi significativa
- Se la tavola della F è organizzata come quella illustrata in precedenza tale valore di F è quello che delimita in corrispondenza di 3,78 un'area a destra pari a 0,025 e si indica come segue: $F(\alpha/2, n_1 - 1, n_2 - 1)$ che nell'esempio è: $F(0,025; 9; 10)$

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

Tavola 4 (segue): Valori critici della Distribuzione F

- Valore di F tabulato per gl=9 al numeratore e gl=10 al denominatore

		gl numeratore																	
		$\alpha = 0.025$																	
gl denominatore	ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	50	60	120	∞
1	1	647.79	799.48	864.15	899.60	921.83	937.11	948.20	956.64	963.28	968.63	984.87	993.08	1001.40	1005.60	1008.10	1009.79	1014.04	1018.26
2	2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.43	39.45	39.46	39.47	39.48	39.48	39.49	39.50
3	3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.25	14.17	14.08	14.04	14.01	13.99	13.95	13.90
4	4	12.22	10.68	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.66	8.56	8.46	8.41	8.38	8.36	8.31	8.26
5	5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.43	6.33	6.23	6.18	6.14	6.12	6.07	6.02
6	6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.27	5.17	5.07	5.01	4.98	4.96	4.90	4.85
7	7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.57	4.47	4.36	4.31	4.28	4.25	4.20	4.14
8	8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.10	4.00	3.89	3.84	3.81	3.78	3.73	3.67
9	9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.77	3.67	3.56	3.51	3.47	3.45	3.39	3.33
10	10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.52	3.42	3.31	3.26	3.22	3.20	3.14	3.08
11	11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.33	3.23	3.12	3.06	3.03	3.00	2.94	2.88
12	12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.18	3.07	2.96	2.91	2.87	2.85	2.79	2.73
13	13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.05	2.95	2.84	2.78	2.74	2.72	2.66	2.60
14	14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	2.95	2.84	2.73	2.67	2.64	2.61	2.55	2.49
15	15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.86	2.76	2.64	2.59	2.55	2.52	2.46	2.40
16	16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.79	2.68	2.57	2.51	2.47	2.45	2.38	2.32
17	17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.72	2.62	2.50	2.44	2.41	2.38	2.32	2.25
18	18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.67	2.56	2.44	2.38	2.35	2.32	2.26	2.19
19	19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.62	2.51	2.39	2.33	2.30	2.27	2.20	2.13
20	20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.57	2.46	2.35	2.29	2.25	2.22	2.16	2.09
21	21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.53	2.42	2.31	2.25	2.21	2.18	2.11	2.04
22	22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.50	2.39	2.27	2.21	2.17	2.14	2.08	2.00
23	23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.47	2.36	2.24	2.18	2.14	2.11	2.04	1.97
24	24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.44	2.33	2.21	2.15	2.11	2.08	2.01	1.94
25	25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.41	2.30	2.18	2.12	2.08	2.05	1.98	1.91
30	30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.31	2.20	2.07	2.01	1.97	1.94	1.87	1.79
40	40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.18	2.07	1.94	1.88	1.83	1.80	1.72	1.64
50	50	5.34	3.97	3.39	3.05	2.83	2.67	2.55	2.46	2.38	2.32	2.11	1.99	1.87	1.80	1.75	1.72	1.64	1.55
60	60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.06	1.94	1.82	1.74	1.70	1.67	1.58	1.48
120	120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	1.94	1.82	1.69	1.61	1.56	1.53	1.43	1.31
∞	∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.83	1.71	1.57	1.48	1.43	1.39	1.27	1.01

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

- Il valore inferiore a 1 che delimita la regione di accettazione lo si trova andando a cercare il valore di F corrispondente a: $F(1 - \alpha/2, n_1 - 1, n_2 - 1)$ vale a dire il valore di F che delimita un'area a destra del valore stesso pari a 0,975
- Pertanto va trovato il valore corrispondente a: $F(0,975; 9; 10)$
- Le tavole per valori critici pari a 0,975 non sono in genere disponibili e vanno usati vari software (AtoZmath.com è uno di questi dove usa la funzione FINV che restituisce un valore di $F = 0,2523$)

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

- La stessa funzione INV F è presente anche in excel però è necessario fare attenzione perché la funzione calcola i valori da 0 a F e quindi per trovare il limite inferiore va trovato il valore di F in corrispondenza di $F(\alpha/2, n_1 - 1, n_2 - 1)$ mentre per il limite superiore va trovato il valore di F in corrispondenza di $F(1 - \alpha/2, n_1 - 1, n_2 - 1)$
- Di seguito è descritta la sintassi della funzione in excel:
 - Limite inferiore: =INV F(0,025;9;10) = 0,2523
 - Limite superiore: =INV F(1-0,025;9;10) = 3,779

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

- Pertanto l'ipotesi nulla $\frac{s_1^2}{s_2^2} = 1$ è rifiutata se:

$$***F > 3,779***$$

Oppure se

$$***F < 0,2523***$$

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

- Vi sono naturalmente altri tipi di test che possono essere effettuati per verificare la omogeneità delle due varianze campionarie;
- Test di Levene, Bartlett, Brown-Forsythe sono probabilmente quelli che si trovano maggiormente in molti software.

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

Nel nostro esempio $F = \frac{54,4_{9gl}}{39,6_{10gl}}$

$$F = 1,37$$

Poiché tale valore è compreso nella regione di accettazione possiamo concludere che non vi è evidenza che le due varianze campionarie differiscono significativamente

Suino n.	Gruppo 1 (trattato)	Gruppo 2 (non trattato)
1	639	650
2	646	633
3	650	631
4	641	637
5	641	642
6	637	638
7	659	640
8	650	634
9	640	626
10	635	636
11		640
MEDIA	643,8	636,7
VARIANZA	54.4	39,6

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

A questo punto si può procedere con la nostra analisi ed applicare il test t di Student

Suino n.	Gruppo 1 (trattato)	Gruppo 2 (non trattato)
1	639	650
2	646	633
3	650	631
4	641	637
5	641	642
6	637	638
7	659	640
8	650	634
9	640	626
10	635	636
11		640
MEDIA	643,8	636,7
VARIANZA	54.4	39,6

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

- Avendo verificato che le due varianze non sono significativamente diverse si può ottenere una stima combinata della varianza e il test t diventa

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

- La quantità s_p^2 è la stima combinata della varianza (p sta per pooled)

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

- La stima pooled della varianza s_p^2 combina le informazioni di entrambe i campioni per produrre una stima di σ^2 più precisa e può essere calcolata in due modi:
- Se conosciamo tutti i singoli valori delle distribuzioni:

$$s_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_{i1} - \bar{x}_1)^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (x_{j1} - \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

- Mentre invece se si dispone dei dati già calcolati la formula che si può utilizzare è la seguente:

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

- Questa seconda formula mette in evidenza che s_p^2 è una media ponderata delle varianze s_1^2 e s_2^2 campionarie e dove ogni varianza è pesata per i rispettivi gradi di libertà (questa formula e la precedente conducono comunque allo stesso risultato)

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

La stima combinata della varianza nel nostro esempio è pertanto:

$$s_p^2 = \frac{(10 - 1)54,4 + (11 - 1)39,6}{10 + 11 - 2}$$

$$s_p^2 = 46,61$$

Suino n.	Gruppo 1 (trattato)	Gruppo 2 (non trattato)
1	639	650
2	646	633
3	650	631
4	641	637
5	641	642
6	637	638
7	659	640
8	650	634
9	640	626
10	635	636
11		640
MEDIA	643,8	636,7
VARIANZA	54.4	39,6

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

Il test t diventa quindi

$$t = \frac{(643,8 - 636,7) - 0}{\sqrt{46,61 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11} \right)}}$$

$$t = 2,38$$

- Il test è bilaterale con valore critico complessivo di $\alpha = 0,05$ (*per 19 g.l.*)

Suino n.	Gruppo 1 (trattato)	Gruppo 2 (non trattato)
1	639	650
2	646	633
3	650	631
4	641	637
5	641	642
6	637	638
7	659	640
8	650	634
9	640	626
10	635	636
11		640
MEDIA	643,8	636,7
VARIANZA	54,4	39,6
VARIANZA COMBINATA = 46,61		

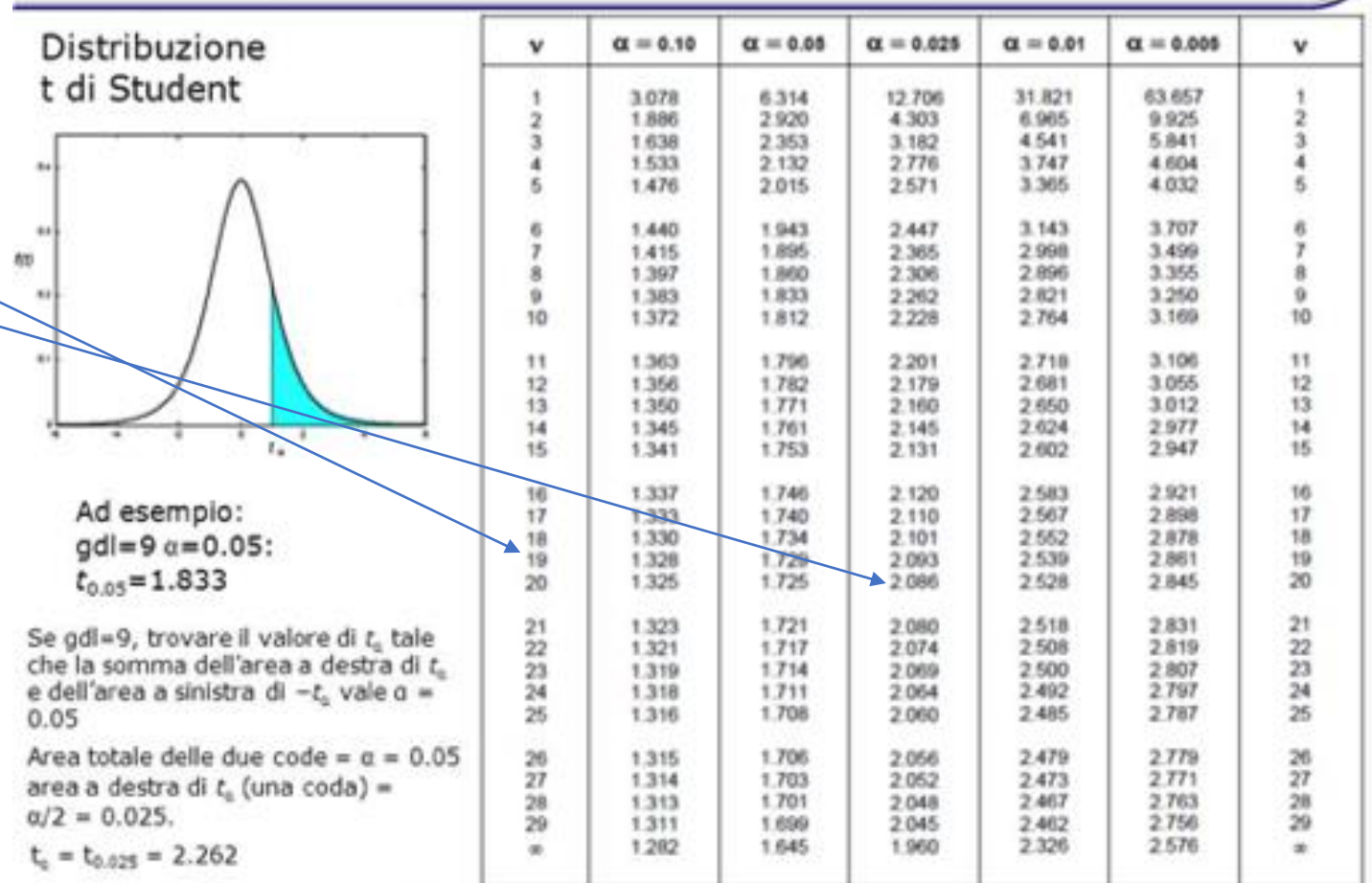
Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

$t = 2,38$ (con 19 gradi di libertà)

In corrispondenza di $t_{\frac{\alpha}{2}; 19\text{ gl}} = 2,086$

Tale valore (2,086) è il valore critico del test e poiché il valore riscontrato è superiore al valore critico vi sono ragioni per ritenere che l'effetto osservato non è attribuibile al caso

Possiamo rifiutare quindi l'ipotesi nulla e ritenere che la differenza osservata sia da attribuire alla somministrazione del probiotico



Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti varianze disuguali)

- Consideriamo ora il caso in cui le varianze dei due gruppi sono disuguali o più precisamente il test di ipotesi sulle varianze non consente di accettare l'ipotesi nulla
- In questo caso non è possibile ottenere una stima combinata della varianza e invece di utilizzare s_p^2 come stima comune della varianza dobbiamo utilizzare le stime ottenute nei due gruppi

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti varianze disuguali)

- Il test t appropriato per questa situazione è:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\left(s_1^2/n_1\right) + \left(s_2^2/n_2\right)}}$$

- Il problema che sorge è che essendo le due varianze non uguali la distribuzione di t può oscillare entro valori molto ampi ed è difficile ottenere l'esatta distribuzione

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti varianze disuguali)

- In questo caso la migliore approssimazione la si ottiene con una distribuzione t dove però i gradi di libertà della distribuzione sono dati risolvendo la seguente equazione:

$$\nu = \frac{\left[\left(s_1^2 / n_1 \right) + \left(s_2^2 / n_2 \right) \right]^2}{\left[\frac{\left(s_1^2 / n_1 \right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(s_2^2 / n_2 \right)^2}{n_2 - 1} \right]}$$

- I gradi di libertà ν sono approssimati per difetto all'intero più vicino.

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti varianze disuguali)

- Si era già visto nelle prime lezioni come la stima campionaria della varianza richiedeva una correzione (il denominatore andava diviso per $n-1$ per ottenerne una stima non viziata)
- Rivediamo l'esempio precedente dell'esperimento sui suini alla luce di quanto detto

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti varianze disuguali)

Si supponga che le varianze dei due gruppi siano quelle indicate nella tabella:

$$s_1^2 = 121,8 \text{ e } s_2^2 = 22,4$$

$$\text{Eseguiamo il test } F = \frac{s_{1;9g.l.}^2}{s_{2;10g.l.}^2} = \frac{121,8}{22,4} = 5,44$$

In questo caso poiché 5,44 è maggiore di 3,778 cade nella regione di rifiuto di H_0 e possiamo concludere che non vi sono evidenze che le due varianze siano simili (rifiutiamo H_0)

Suino n.	Gruppo 1 (trattato)	Gruppo 2 (non trattato)
MEDIA	643,8	636,7
VARIANZA	121,8	22,4

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti varianze disuguali)

- Per trovare i gradi di libertà per la distribuzione t dobbiamo usare la formula abbastanza complicata vista in precedenza:

$$v = \frac{\left[\left(s_1^2 / n_1 \right) + \left(s_2^2 / n_2 \right) \right]^2}{\left[\frac{\left(s_1^2 / n_1 \right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(s_2^2 / n_2 \right)^2}{n_2 - 1} \right]}$$

Che diventa:

$$v = \frac{\left[\left(121,8 / 10 \right) + \left(22,4 / 11 \right) \right]^2}{\left[\frac{\left(121,8 / 10 \right)^2}{10 - 1} + \frac{\left(22,4 / 11 \right)^2}{11 - 1} \right]} \sim 11$$

Notare la riduzione dei gradi di libertà da 19 a 11 rispetto all'esempio precedente dove le varianze erano pressochè simili

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti varianze disuguali)

- Il test t da eseguire ha pertanto 11 g.l.

$$t_{\alpha/2; 11 g.l.} = \frac{(643,8 - 636,7)}{\sqrt{115,5/10 + 26,2/11}} = 1,84$$

Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti)

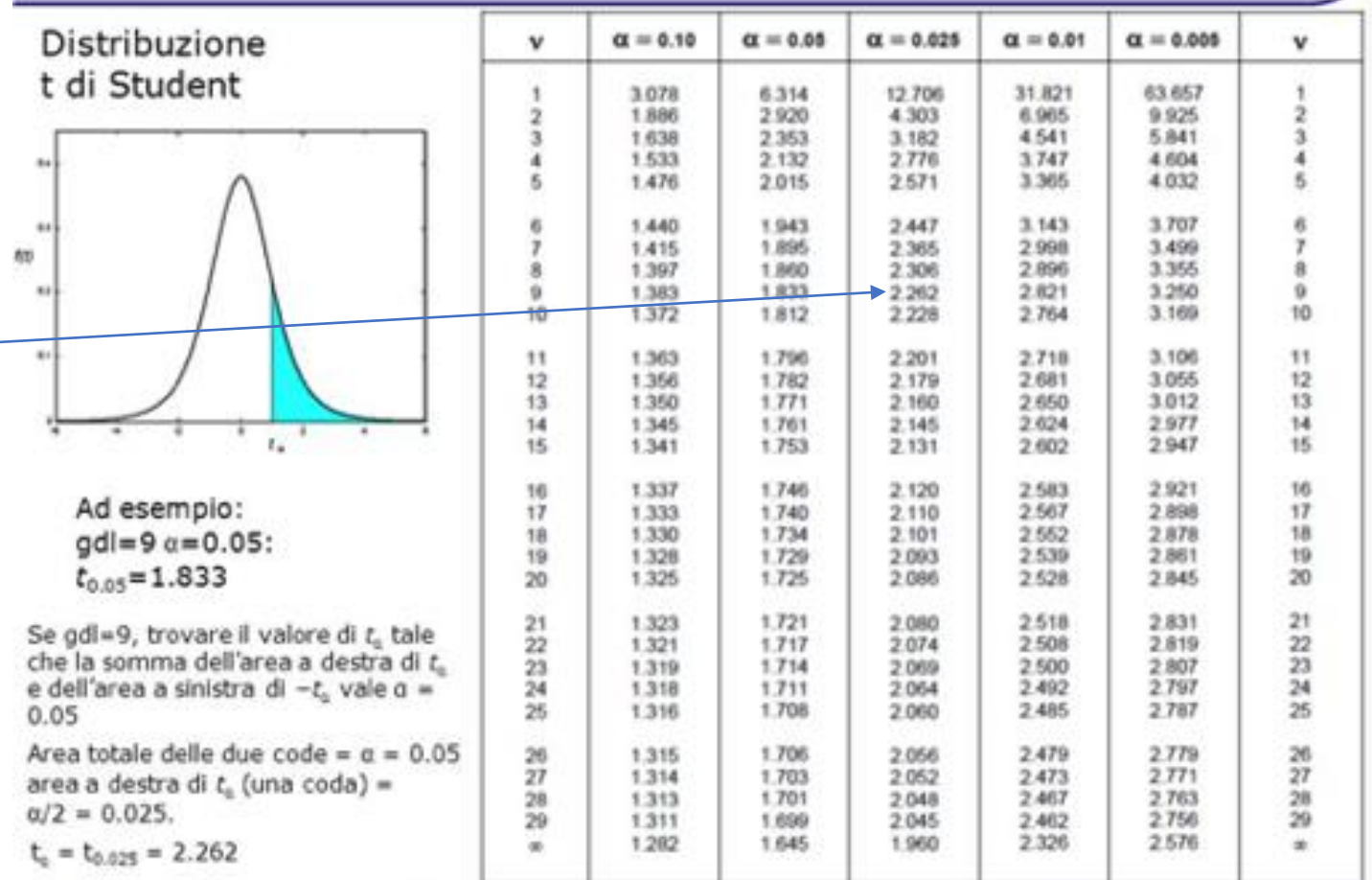
$t = 1,83$ (con 11 gradi di libertà) con valore critico pari a 0,025

In corrispondenza di 11 g.l. e $\alpha = 0,025$

$t = 2,262$

Il valore riscontrato pari a 1,83 non supera il valore soglia di 2,262 e pertanto non vi sono elementi per poter rifiutare l'ipotesi nulla.

Se ne conclude che non vi sono sufficienti evidenze per affermare che la somministrazione del probiotico abbia prodotto effetti significativi a livello del 5%



Test di ipotesi su due medie (campioni indipendenti varianze disuguali)

- Il fatto che tra i due campioni vi sia una variabilità diversa fa ritenere che per poter osservare un possibile effetto attribuibile alla somministrazione del probiotico sarebbe stato necessario aumentare la numerosità campionaria
- L'approccio corretto sarebbe stato quello di decidere prima quale differenza poteva avere un qualche valore che valeva la pena poter mettere in evidenza

Test di ipotesi su due proporzioni

Test di ipotesi su due proporzioni

- Come per le medie il test di ipotesi può essere applicato anche al confronto di due proporzioni
- In genere si è interessati a verificare l'ipotesi nulla che le proporzioni di due popolazioni indipendenti sono uguali
- Per eseguire il test la procedura non è dissimile da quanto effettuato in precedenza

Test di ipotesi su due proporzioni

- Si estrae un campione casuale di dimensioni n_1 da una popolazione con media p_1
- Se si verificano s_1 successi nel campione allora la stima campionaria di p_1 diventa: $\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1}$

Test di ipotesi su due proporzioni

- Allo stesso modo si estrae un campione di dimensioni n_2 da una popolazione con media p_2
- Se si verificano s_2 successi nel campione allora la stima campionaria di p_2 diventa: $\hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2}$

Test di ipotesi su due proporzioni

- Sotto l'ipotesi nulla $H_0: \hat{p}_1 - \hat{p}_2 = p_1 - p_2 = 0$ le due proporzioni campionarie \hat{p}_1 e \hat{p}_2 possono essere combinate per ottenere una stima comune della proporzione di successi:

$$\hat{p} = \frac{n_1 \hat{p}_1}{n_1 + n_2} = \frac{s_1 + s_2}{n_1 + n_2}$$

Dove la quantità \hat{p} è una media ponderata delle proporzioni campionarie \hat{p}_1 e \hat{p}_2

Test di ipotesi su due proporzioni

- La stima dell'Errore Standard della differenza $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ prende la forma:

$$SE = \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n_1} + \frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n_2}}$$

ed il test Z diventa

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n_1} + \frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n_2}}}$$

Test di ipotesi su due proporzioni

- Prima di poter applicare l'approssimazione alla normale Z è opportuno verificare che le quantità $n_1\hat{p}$, $n_1(1 - \hat{p})$, $n_2\hat{p}$, $n_2(1 - \hat{p})$ siano tutti maggiori o uguali a 5
- Come al solito una volta ottenuto il valore del test lo si confronta con il valore corrispondente al livello di significatività scelto

Test di ipotesi su due proporzioni

- Esempio n. 1
- Si vuole studiare se la proporzione di cani di razza Pastore Tedesco con displasia dell'anca è simile alla proporzione che si osserva in altre razze di cane di media taglia
- Lo studio viene effettuato sottoponendo ad indagine strumentale soggetti di età compresa tra 9 e 12 mesi

Test di ipotesi su due proporzioni

- Si supponga di aver esaminato 60 soggetti di razza Pastore Tedesco e di aver rilevato una proporzione pari a $\hat{p}_{pt} = \frac{15}{60} = 0,25$ (25%)
- Tale valore è la stima campionaria della proporzione p_{pt} della displasia dell'anca nella popolazione dei pastori tedeschi
- Si supponga inoltre di aver sottoposto ad indagine strumentale 82 soggetti di altre razze di taglia media e di aver rilevato una proporzione pari a $\hat{p}_{ar} = \frac{12}{82} = 0,146$ (14,6%)
- Anche in questo caso la proporzione \hat{p}_{ar} è una stima campionaria della proporzione p_{ar}

Test di ipotesi su due proporzioni

- Come al solito formuliamo l'ipotesi nulla $H_0: p_{pt} - p_{ar} = \hat{p}_{pt} - \hat{p}_{ar} = 0$
- L'ipotesi alternativa è: $H_a: p_{pt} - p_{ar} = \hat{p}_{pt} - \hat{p}_{ar} \neq 0$
- Come livello di significatività scegliamo un livello del 5% ad un test bilaterale

Test di ipotesi su due proporzioni

- La differenza osservata tra le due proporzioni campionarie è:

$$\hat{p}_{pt} - \hat{p}_{ar} = 0,25 - 0,146 = 0,104$$

- Si tratta quindi di verificare se la differenza tra le due medie campionarie è da ritenersi frutto della variabilità casuale (ipotesi nulla) oppure se vi sono elementi per ritenere che la proporzione di cani con displasia dell'anca è effettivamente diversa tra pastori tedeschi e soggetti di media taglia di altre razze

Test di ipotesi su due proporzioni

- Sotto l'ipotesi nulla di non differenza tra le due proporzioni campionarie si può ottenerne una stima combinata:

$$\hat{p} = \frac{15 + 12}{60 + 82} = \frac{27}{142} = 0,19 \text{ (19\%)}$$

- Verificato che le quantità $n_1\hat{p}$, $n_1(1 - \hat{p})$, $n_2\hat{p}$, $n_2(1 - \hat{p})$ sono tutte maggiori o uguali a 5 si può procedere al test Z

Test di ipotesi su due proporzioni

$$Z = \frac{(0,104) - 0}{\sqrt{\left(\frac{0,19 \cdot 0,81}{60}\right) + \left(\frac{0,19 \cdot 0,81}{82}\right)}} = 1,56$$

Test di ipotesi su due proporzioni

- Un modo alternativo di procedere poteva essere quello di costruire un intervallo di confidenza attorno alla stima della differenza campionaria
- Si sarebbe potuto procedere come segue:

$$p_{pt} - p_{ar} = 0,104$$

$$SE = \sqrt{\frac{p_{pt}(1 - p_{pt})}{n_{pt}} + \frac{p_{ar}(1 - p_{ar})}{n_{ar}}} = \sqrt{\frac{0,25 \cdot 0,75}{60} + \frac{0,146 \cdot 0,854}{82}} = 0,068$$

NOTA: per calcolare l'Errore Standard è stata utilizzata la somma delle stime delle due Varianze delle rispettive medie campionarie ciascuno con la sua proporzione stimata e non la stima combinata come fatto per il test di ipotesi. Quando la verifica viene fatta attraverso la stima dell'intervallo di confidenza non è necessario assumere che le due proporzioni siano uguali

Test di ipotesi su due proporzioni

- L'intervallo di confidenza al 95% per la differenza delle due medie campionarie diventa pertanto:

$$0,104 \pm (1,96 \cdot 0,068)$$

$$\textit{Limite superiore} = 0,104 + 0,133 = 0,237$$

$$\textit{Limite inferiore} = 0,104 - 0,133 = -0,0296$$

Test di ipotesi su due proporzioni

- Poiché l'intervallo

$$\textit{Limite superiore} = 0,104 + 0,133 = 0,237$$

$$\textit{Limite inferiore} = 0,104 - 0,133 = -0,0296$$

Contiene il valore 0 ciò sta a significare che non vi sono elementi per rifiutare l'ipotesi nulla e la differenza 0,104 è uno dei possibili valori che si sarebbero potuti osservare il 95% provenienti da una distribuzione con media 0

Il risultato prodotto con questo secondo approccio è analogo a quello del metodo precedente